DETERMINISTIC CHAOS

V. S. ANISHCHENKO

In the article the substantiation of the possibility of existence of non-periodical regimes in deterministic dynamical systems is given by means of the qualitative analysis. The definition of the term "deterministic chaos" is presented and its properties are discussed.

Методом качественного анализа дается обоснование возможности существования непериодических режимов колебаний в детерминированных динамических системах. Приводится определение детерминированного хаоса и обсуждаются его свойства.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

В. С. АНИЩЕНКО

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Наш темный глаз печально слеп,
И только плоскость нам знакома.
Наш мир широкий – только склеп
В подвале творческого дома.

Ф. Сологуб.
На опрокинутый кувшин... 1923

ВВЕДЕНИЕ

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных системах – одна из фундаментальных проблем современного естествознания. Убедительно доказано, что в таких системах причина генерирования сложных колебательных процессов кроется не в большом числе степеней свободы и не в наличии флуктуаций, а в экспоненциальной неустойчивости режимов. Возможность подобных явлений понимал и предвидел А. Пуанкаре. В неустойчивых системах "совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которое мы не можем предусмотреть. ...Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное" – так писал он еще в 1908 г. в книге "Наука и метод". Развитие идей Пуанкаре привело к созданию фундамента хаотической динамики детерминированных систем. Как оказалось, необходимым условием возникновения хаоса в динамических системах является размерность фазового пространства $N \geq 3$, то есть когда состояние системы характеризуется минимум тремя переменными.

В системах с двумя переменными состояния, фазовым пространством которых служит двумерная плоскость, возможные динамические режимы исчерпываются положениями равновесия и периодическими колебаниями (предельными циклами). Это обстоятельство многие годы служило психологическим барьером, преодолению которого не помогали даже очевидные (сейчас!) экспериментальные результаты. Ограниченность "нелинейного мышления" на базе фазовой плоскости понимали многие ведущие ученые, однако из-за отсутствия соответствующего математического аппарата обоснованный выход с плоскости в пространство трех и более измерений был практически невозможен.

ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТЬ

Что представляет собой явление детермированного хаоса? Попытаемся ответить на этот вопрос. Вначале необходимо внести ясность в понимание терминов *детермированность* и *хаос*, а затем определить содержание термина *детерминированный хаос*. Когда говорят о детермированности, подразумевают однозначную взаимосвязь причины и следствия. Если задано некоторое начальное состояние системы при $t = t_0$, то оно однозначно определяет состояние системы в любой момент времени $t > t_0$. Например, если тело движется равноускоренно, то его скорость определяется детерминированным законом

$$\upsilon(t) = \upsilon(t_0) + at. \quad (1)$$

При задании начальной скорости $\upsilon(t_0)$ мы однозначно определяем значение скорости $\upsilon(t)$ в любой момент времени $t > t_0$.

В общем случае зависимость будущего состояния $x(t)$ от начального $x(t_0)$ можно записать в виде $x(t) = F[x(t_0)]$, где F – детерминированный закон, который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

ХАОС

Теперь внесем ясность в понятие *хаос*. Проведем мысленный эксперимент с броуновской частицей. Поместим частицу в момент $t = t_0$ в раствор жидкости и с помощью микроскопа начнем фиксировать ее положение во времени, отмечая координаты частицы через равные интервалы Δt. Нетрудно убедиться, что под действием случайных толчков со стороны окружающих молекул частица будет совершать нерегулярные блуждания, которые характеризуются запутанной траекторией. Повторим эксперимент несколько раз подряд, осуществляя в пределах возможностей воспроизводство начальных условий опыта. Каковы будут результаты? Их главным образом два. Первый – каждый раз траектория движения частицы будет сложной, непериодической; второй – любая попытка однозначного повторения опыта приведет к отрицательному результату. Каждый раз при повторении опыта с одинаковыми (в пределах наших возможностей) начальными условиями мы будем получать различные траектории движения частицы! Классическое явление движения броуновской частицы дает четкие физические представления о хаосе как о непредсказуемом, случайном процессе. Если мы говорим о хаосе, мы подразумеваем, что изменение во времени состояния системы является случайным (его нельзя однозначно предсказать) и невоспроизводимым (процесс нельзя повторить).

Мы приходим к убеждению, что понятия *детерминизм* и *хаос* прямо противоположны по смыслу. Детерминизм ассоциируется с полной предсказуемостью и воспроизводимостью, хаос – с полной непредсказуемостью и невоспроизводимостью. Возникает закономерный вопрос, что понимается под термином *детерминированный хаос*, где объединены два противоположных по смыслу понятия? Ответить на этот вопрос непросто, но возможно.

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Нам понадобится понятие *устойчивости* (*неустойчивости*) движения. Рассмотрим состояние покоя или равновесия системы. Поместим маленький шарик в нижнюю точку внутри полой сферы. Слегка толкнем его и понаблюдаем за движением. После совершения нескольких затухающих колебаний шарик вновь займет положение на дне сферы. Положение равновесия *устойчиво*: малые возмущения исходного состояния затухают во времени. Если мы поместим шарик на вершину сферы (снаружи), то реакция на малое возмущение будет иной: при сколь угодно малом отклонении шарика от состояния равновесия он скатывается с вершины. Это положение равновесия *неустойчиво*: малые возмущения нарастают во времени.

Физический смысл понятия “устойчивость” (“неустойчивость”) применительно к состоянию равновесия сохраняется и в отношении любого другого режима. Режим функционирования динамической системы называют *устойчивым*, если малые возмущения затухают во времени, стремясь к нулю. Если этого не происходит и малые отклонения от режима функционирования системы нарастают во времени, такой режим будет *неустойчивым*.

НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Теперь обсудим другое важное свойство сложных систем – *нелинейность*. Пусть мы имеем дело с неустойчивым режимом. Нарушив режим малым воздействием, мы сначала будем фиксировать нарастание возмущения. Будет ли оно бесконечным? В реальной жизни никогда! Отклонение будет нарастать до тех пор, пока не вступит в действие механизм нелинейного ограничения процесса нарастания возмущения. Что это такое? Ответим на этот вопрос с физической и математической точек зрения. С физической точки зрения нарастание амплитуды не может происходить до бесконечности. В силу ограниченности энергетических ресурсов системы это нарастание должно прекратиться или смениться уменьшением амплитуды отклонения. Любой новый режим должен иметь конечную амплитуду, и управляют этими процессами нелинейные законы. Свойства нелинейной системы непосредственно зависят от ее состояния. Приведем пример. Пусть зависимость амплитуды отклонения $f(x)$ от исходного состояния x определяется соотношением

$$f(x) = kx - bx^3, \quad (2)$$

где k и b – постоянные положительные коэффициенты. Если $x \ll 1$, то $bx^3 \ll kx$ и

$$f(x) \simeq kx. \quad (3)$$

В случае (3) $f(x)$ линейно растет с ростом x. Если же x становится сравнимым с единицей, то членом bx^3 пренебрегать уже нельзя. В случае (2) рост отклонения $f(x)$ за счет члена kx начнет испытывать нелинейное ограничение в силу вычитания величины bx^3. При некоторых значениях x величина отклонения (2) вновь будет близка к нулю и все начнется сначала. Система будет как бы автоматически себя регулировать, так как ее свойства зависят от текущего состояния.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ

Рассмотрим неустойчивую детерминированную систему с учетом нелинейного ограничения нарастаний возмущений. Для простоты рассмотрим состояние равновесия, которому отвечает точка в пространстве фазовых координат системы. Выведем систему из равновесия малым отклонением. Это возмущение начнет нарастать в силу неустойчивости. Далее нарастание возмущения начнет замедляться (вступит в силу механизм нелинейного ограничения). Чего можно ожидать в этой ситуации? В силу нелинейного ограничения отклонение уменьшится строго до нуля, система вернется в исходное состояние равновесия. Теоретически это возможно, однако очень маловероятно, так как исходное состояние равновесия неустойчиво. Более вероятна другая ситуация: система вернется в малую окрестность исходного состояния (подойдет очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнет от него удаляться. Этот процесс будет длиться бесконечно во времени! Но реализация такого процесса требует некоторых специальных условий.

Предположим, что мы имеем дело с двумерной дифференциальной динамической системой. Пространство ее состояний – фазовая плоскость с координатами x и y. Если малое возмущение состояния равновесия в такой системе будет нарастать, а в результате нелинейного ограничения далее уменьшаться, то возможны два варианта: появление новых устойчивых состояний равновесия вблизи неустойчивого либо переход в новый режим, отвечающий периодическим колебаниям.

Второй вариант иллюстрирует рис. 1. При малых амплитудах возмущения (рис. 1, *а*) траектория по спирали удаляется от точки равновесия *O*. При больших отклонениях (рис. 1, *б*) траектория возвращается. Вместо неустойчивого состояния равновесия появляется новый режим – периодические автоколебания, которым отвечает предельный цикл Г на фазовой плоскости.

Неустойчивость состояния равновесия в двумерной нелинейной системе порождает режим устойчивых периодических колебаний. Если мы вообразим себе иную ситуацию, когда отклонение от состояния равновесия вначале нарастает, а затем в силу нелинейности вновь стремится к нулю, мы придем к противоречию: фазовая траектория обязана будет самопересекаться (рис. 2)! Но из этого следует, что существуют различные начальные условия, приводящие в итоге к одинаковым состояниям! Это невозможно в силу теоремы единственности решения: при заданных начальных условиях решение существует и оно единственное, другого не дано.

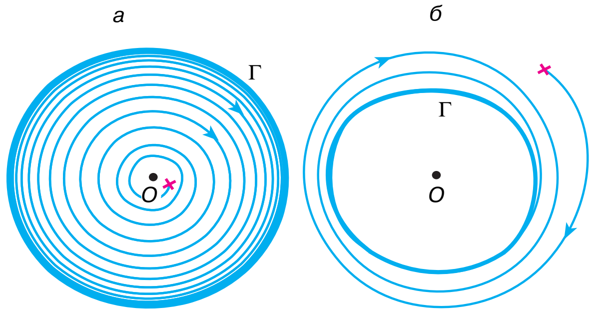

Рис. 1. Рождение устойчивого предельного цикла Г в окрестности неустойчивого равновесия *O*. Поведение траекторий при малых (*а*) и при больших (*б*) отклонениях от равновесия

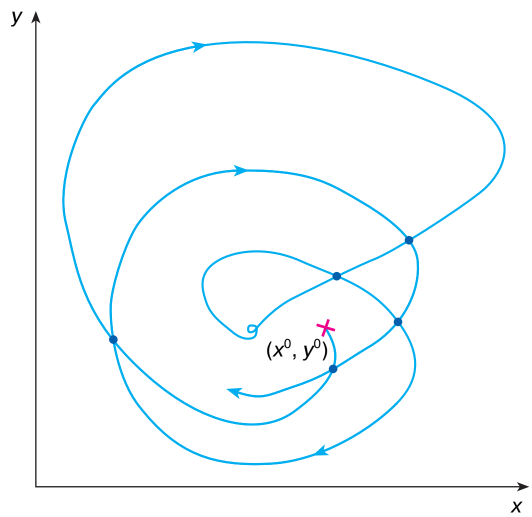

Рис. 2. Поведение динамической системы, которое невозможно реализовать на плоскости в силу пересечения фазовых траекторий. Реально эта картина получается путем проекции трехмерной траектории на плоскость двух переменных

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Картина принципиально изменится, если мы рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется тремя независимыми переменными (фазовыми координатами). Другими словами, давайте повторим наши рассуждения, осуществив выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство. Ничто не запрещает нам реализовать ситуацию рис. 2 в пространстве трех измерений. Траектория раскручивается в трехмерном пространстве, удаляясь от точки O по спирали. Достигнув некоторых значений и испытывая действие механизма нелинейного ограничения, траектория вновь вернется в окрестность исходного состояния. Далее ввиду неустойчивости процесс будет повторяться (рис. 3).

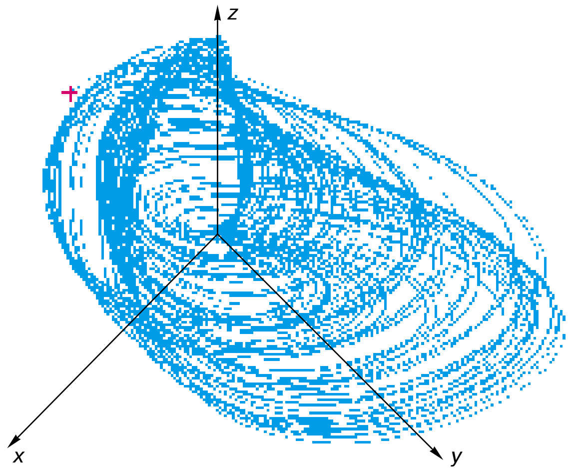

Рис. 3. Возможный вид фазовой траектории в трехмерной нелинейной диссипативной системе, отвечающий наличию странного аттрактора

Возможны два варианта: траектория спустя конечное время замкнется, демонстрируя наличие сложного, но периодического процесса; траектория будет воспроизводить некий апериодический процесс, если при $t \longrightarrow \infty$ замыкания не произойдет. Второй случай и отвечает режиму детерминированного хаоса! Действительно, работает основной принцип детерминизма: будущее однозначно определено начальным состоянием. Однако процесс эволюции системы сложный, непериодический. Чисто внешне он ничем не отличается от случайного! Но при более детальном анализе вскрывается одно важное отличие этого процесса от случайного – этот процесс воспроизводим! Действительно, повторив еще раз начальное состояние, в силу детерминированности мы вновь воспроизведем ту же самую траекторию независимо от степени ее сложности. Значит, этот непериодический процесс не является хаотическим в смысле определения хаоса, данного нами выше? Да, это сложный, похожий на случайный, но тем не менее детерминированный процесс. Здесь важно то, что он характеризуется неустойчивостью и это обстоятельство позволяет нам понять еще одно принципиально важное свойство систем с детерминированным хаосом – перемешивание.

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

Мы установили, что в динамических системах, размерность фазового пространства которых $N \geq 3$, теоретически возможен режим сложных непериодических пульсаций. Этот тип движения детерминирован и характеризуется неустойчивостью. К чему это приводит? Поговорим об устойчивых режимах движения в детерминированных динамических системах, в которых имеются потери энергии (их называют диссипативными).

Рассмотрим в качестве начального состояния не точку с определенными координатами в пространстве состояний x^0, а малую сферу радиуса $\varepsilon > 0$, окружающую эту точку. Любая точка внутри сферы характеризует малое отклонение от x^0. Сфера включает совокупность возможных отклонений от исходного состояния, не превышающих по модулю ε. Теперь проследим за трансформацией этой сферы во времени (вдоль траектории). В силу устойчивости выбранного нами режима любое малое отклонение во времени должно затухать! Это означает, что под действием детерминированного закона эволюции шарик радиуса ε во времени будет уменьшаться и при $t \longrightarrow \infty$ его радиус уменьшится до нуля! Сказанное выше иллюстрирует рис. 4. Исходный фазовый объем в диссипативных системах во времени уменьшается.

А если исходный режим неустойчив? Что будет в этом случае? Фазовый объем может увеличиваться до бесконечности, если неустойчивая система линейна. Но если система нелинейна и диссипативна, то процесс эволюции начального малого фазового объема будет нетривиальным. Попытаемся это понять.

Неустойчивость режима ведет к росту возмущений. Это одно обстоятельство. Второе – диссипативные системы вне зависимости от вида устойчивости

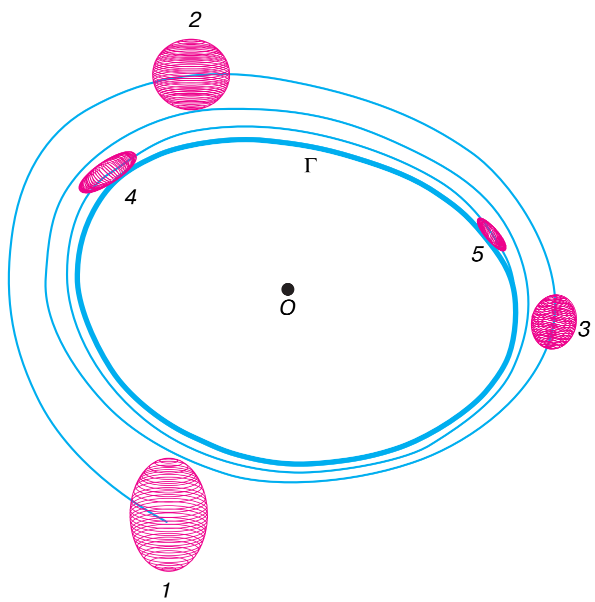

Рис. 4. Сжатие первоначальной области неопределенности *1* во времени в случае, когда цикл Г является устойчивым предельным режимом

вызывают уменьшение элемента фазового объема во времени до нуля, что обусловлено потерями энергии. Как совместить эти два фактора? Существует единственное решение этой дилеммы: элемент фазового объема по некоторым направлениям должен растягиваться, а по другим – сжиматься, причем степень сжатия в среднем должна обязательно преобладать над степенью расширения, чтобы в итоге фазовый объем во времени уменьшался. В нелинейных диссипативных системах это оказывается возможным. Сказанное выше иллюстрирует рис. 5. В силу наличия механизма нелинейного ограничения фазовая траектория сложного режима колебаний сосредоточена в ограниченной области фазового пространства (см. рис. 3). При этом любая малая окрестность исходного начального состояния эволюционирует так, как показано на рис. 5, и в итоге перемещается по всей области, занятой траекторией. Этот процесс трудно представить себе наглядно.

Проведем мысленный эксперимент. В стакан с водой поместим маленькую чаинку и размешаем воду ложкой, вызвав неустойчивость. Чаинка будет при этом двигаться по сложной спиралеобразной траектории, которая обусловлена движением воды в стакане. При этом в любой заданный момент времени мы теоретически можем зафиксировать ее координаты $x(t)$ в объеме воды. Теперь вместо чаинки поместим в стакан с водой очень маленькую капельку чернил и вновь размешаем воду. Что при этом произойдет? Чернила практически равномерно разбегутся по всему объему воды, слегка окрасив ее. Частички чернил, первоначально сосредоточенные в маленьком объеме капельки, спустя время перемешивания можно будет обнаружить в любой части объема воды в стакане. В жизни этот процесс мы называем перемешиванием. В математике это понятие также существует и с точки зрения физической интерпретации оказывается близким по смыслу. Действительно, поток воды в стакане, созданный движением чайной ложки, можно интерпретировать как действие детерминированного закона, определяющего динамическую систему. Чаинка при этом будет двигаться по сложной, но детерминированной траектории. А капелька чернил, которую можно интерпретировать как некий маленький объем в фазовом пространстве вокруг чаинки, перемешается во всем объеме воды.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Таким образом, в неустойчивых режимах в детерминированных нелинейных системах с перемешиванием мы можем предсказать будущее состояние однозначно только в случае строгого задания начальных условий. Однако если учесть сколь угодно малую ошибку (то есть рассмотреть капельку чернил вместо чаинки), то детерминированное предсказание становится невозможным. Малая область

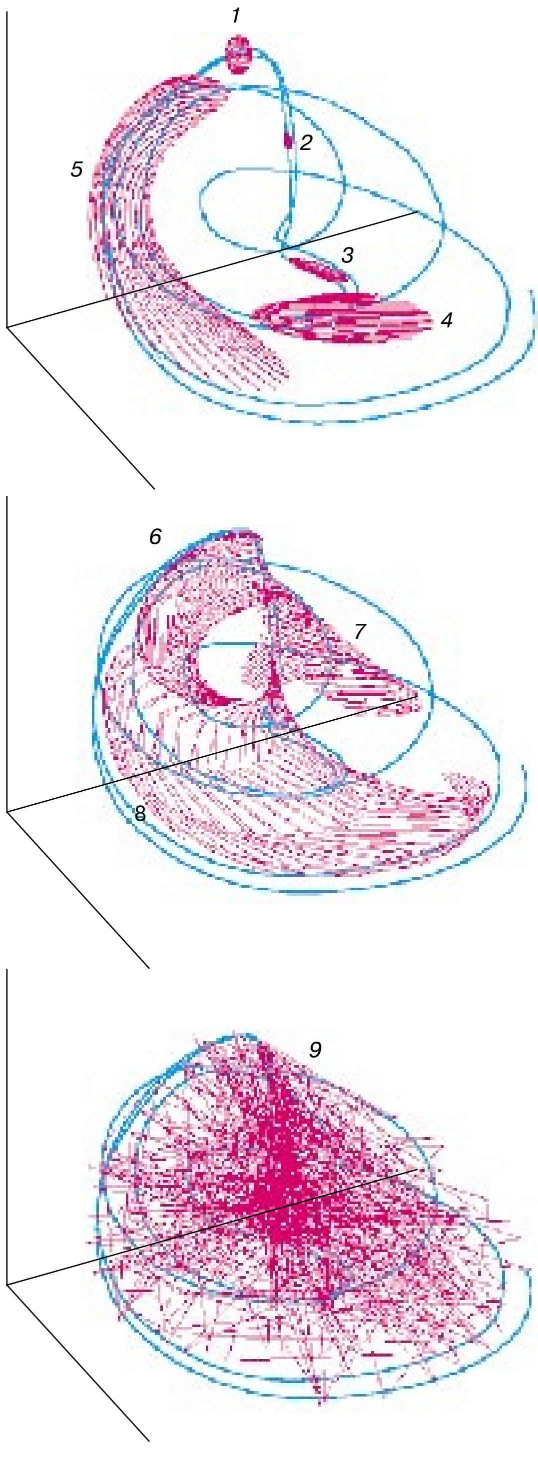

Рис. 5. Эволюция малого первоначального фазового объема *1* во времени в системе со странным аттрактором, иллюстрирующая перемешивание. Исходный объем *1* сжимается по одним и растягивается по другим направлениям (*2–4*), изгибается (*5*, *6*), “складывается” (*7*, *8*) и в итоге перемешивается по аттрактору (*9*)

первоначальной неопределенности размывается за счет перемешивания на конечную область в фазовом пространстве. Теперь мы имеем дело с процессом, который ассоциируется с настоящей случайностью, с настоящим хаосом.

Основным свойством динамических систем, демонстрирующих режим детерминированного хаоса, является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Именно это обстоятельство ведет к потере детерминированной предсказуемости и необходимости вводить вероятностные характеристики для описания динамики таких систем. В этом смысле становится понятным термин *детерминированный хаос*, который характеризует рождение случайного, непредсказуемого поведения системы, управляемого детерминированными законами.

Неопределенность в задании начального состояния – ситуация вполне реальная с точки зрения физики. Действительно, в силу конечной точности регистрации состояния любыми приборами оно определяется с конечной (пусть сколь угодно малой) ошибкой. Это означает, что нужно анализировать эволюцию во времени не начальной точки, а начальной области вокруг этой точки. В силу перемешивания мы сталкнемся с процессом, подробно описанным выше.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКЗОТИКА ИЛИ ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО МАТЕРИАЛЬНОГО МИРА?

Путем простейших рассуждений мы пришли к выводу о возможности режима детерминированного хаоса в нелинейных системах с диссипацией энергии. В современной науке этот эффект строго обоснован теоретически и достоверно подтвержден экспериментально. Может возникнуть вопрос: не является ли этот феномен математической экзотикой в том смысле, что его реализация теоретически возможна, но практически маловероятна? Нет и еще раз нет! После открытия детерминированного хаоса, ясного понимания свойств эффекта и разработки методов его диагностики хаос был обнаружен практически во всех областях современного естествознания: в физике, радиотехнике, химии, биологии, механике, экономике и др. Может возникнуть естественный вопрос: почему до недавнего времени этот типичный режим функционирования динамических систем не был обнаружен и описан? Этому есть объяснение.

Хотя теоретически подавляющее число реальных материальных систем и процессов нелинейно, существует широкий класс процессов, достаточно корректно описываемых в линейном или квазилинейном приближении. Линейная теория динамических систем и процессов разработана достаточно полно и позволяет дать их исчерпывающее описание, хорошо согласующееся с экспериментом. Но детерминированный хаос – явление, присущее исключительно нелинейным системам. А в отношении нелинейной теории дела обстоят намного хуже. Пока не существует, например, общей теории решения нелинейных дифференциальных уравнений. Анализ динамики нелинейных систем и сейчас требует искусства, творческого подхода, индивидуального в каждом конкретном случае.

Именно отсутствие строгих теоретических результатов применительно к нелинейным системам сдерживало открытие и понимание этого универсального явления. Экспериментаторы давно сталкивались с проявлением хаоса. Однако ограниченность теоретических знаний, обусловленная влиянием линейной и квазилинейной структуры научного мышления, приводила к ошибкам в трактовке наблюдаемых результатов. Был сделан вывод о том, что шумоподобные колебания обусловлены либо действием флуктуаций, либо огромным числом степеней свободы системы, либо неисправностью измерительной аппаратуры.

Сейчас положение изменилось. Наша жизнь все более настоятельно требует количественного учета таких факторов, как сверхвысокая плотность, сверхвысокая температура, давление, сверхвысокие скорости, плотности населения и т.д. А, как известно, учет этих факторов требует принципиально нелинейного подхода к описанию эволюционных процессов. Эти процессы моделируются и анализируются с помощью компьютеров, для которых нелинейность модели не является препятствием для детального анализа. И выяснилось, что в таких системах хаотический режим функционирования скорее правило, чем исключение.

СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Математическим образом режима функционирования диссипативной динамической системы служит *аттрактор* – предельная траектория изображающей точки в фазовом пространстве, к которой стремятся все исходные режимы. Если этот режим есть устойчивое состояние равновесия – аттрактор системы будет просто неподвижной точкой, если это устойчивое периодическое движение – аттрактором будет замкнутая кривая, называемая предельным циклом. Раньше считалось, что аттрактор есть образ исключительно устойчивого режима функционирования системы. Сейчас мы понимаем, что режим детерминированного хаоса тоже аттрактор в смысле определения предельной траектории в ограниченной области фазового пространства (см. рис. 3). Однако такой аттрактор имеет два существенных отличия: траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают). Именно эти отличия и привели к необходимости ввести в рассмотрение новый термин. С легкой руки французского исследователя Ф. Такенса такие аттракторы стали называть *странными*.

Каков критерий странности? Как установлено теоретиками, основным критерием странности аттрактора является неустойчивость траектории. Причем неустойчивость обязана быть экспоненциальной! Это означает, что малое возмущение режима $D(0)$ должно во времени увеличиваться по экспоненте:

$$D(t) = D(0)\exp(\lambda t), \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{D(t)}{D(0)}. \qquad (4)$$

Оказалось, что положительность величины λ говорит не только об экспоненциальной неустойчивости режима колебаний, но и доказывает наличие в системе перемешивания. Если установлено, что исследуемый режим имеет $\lambda > 0$, то следствием будут непериодичность в зависимости от времени любой из координат состояния, сплошной спектр мощности (в спектре колебаний присутствуют все частоты из некоторого интервала) и спадающая во времени автокорреляционная функция. До недавнего времени с таким поведением указанных характеристик однозначно связывали представления о случайном процессе. Теперь мы знаем, что подобными свойствами может обладать процесс, порождаемый детерминированными законами. Это обстоятельство и послужило основанием называть такие процессы детерминированным хаосом.

ВЫВОДЫ

В результате простого качественного рассмотрения особенностей нелинейных диссипативных динамических систем мы пришли к новым принципиальным выводам.

1. В дифференциальных системах с размерностью фазового пространства $N \geq 3$ теоретически возможны установившиеся непериодические режимы колебаний.

2. Принципиальной особенностью таких колебаний является их неустойчивость, что приводит к чувствительной зависимости динамики системы от малых возмущений.

3. Неустойчивость нелинейной системы в совокупности с ограниченностью энергии колебаний может вызывать перемешивание.

4. Наличие перемешивания приводит к необходимости введения статистического описания динамики детерминированных систем со странными аттракторами как наиболее удобного.

Перечисленные результаты убеждают в том, что режимы функционирования детерминированных нелинейных систем со странными аттракторами действительно обладают специфическими свойствами, совокупность которых включается в понятие детерминированного хаоса.

В заключение я хотел бы поблагодарить моих учеников: Соросовского аспиранта И.А. Хованова за результаты расчетов, представленных на рисунках, и аспирантку Г.И. Стрелкову за подготовку статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988. Гл. 1, 5.

2. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. Гл. 1, 4.

3. *Рабинович М.И.* // Успехи физ. наук. 1978. Т. 125, № 1. С. 123.

* * *

Вадим Семенович Анищенко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой радиофизики Саратовского государственного университета, заслуженный деятель науки Российской Федерации, член-корреспондент Международной академии информатизации. Область научных интересов: нелинейная динамика и статистическая радиофизика. Автор более 200 научных работ, шести научных монографий.